Проценты.

Задачи на проценты вызывают самые большие затруднения у школьников. Однако, для решения таких задач бывает достаточно только твердого понимания, что 1 процент (1%) от А - это одна сотая часть А. Так один процент от числа 155 есть 1,55. Если в условии задачи говорится, что число А увеличилось на x %, то можно посчитать, что оно увеличилось на $0,01 \cdot x \cdot A$ (1 % это $0,01 \cdot A$, следовательно x % - это $0,01 \cdot x \cdot A$), следовательно все число стало $(1+0,01 \cdot x)A$. Так, например, увеличение числа на 40 % есть увеличение его в 1,4 раза, обещание банком 300 % годовых есть увеличение вашего капитала в 4 раза. Если же число уменьшить на x %, то оно станет равным $(1-0,01 \cdot x)A$. Так, уменьшение стоимости на 30 % есть уменьшение в 0,7 раза.

Для решения задач на проценты необходимо хорошо уяснить для себя соответствие между увеличением (уменьшением) на данное число процентов и увеличением (уменьшением) в данное число раз. Надеюсь, Вам поможет в этом следующие примеры.

Число:	Значит оно:
25% числа А	0,25А
340% числа А	3,4А
Увеличилось на 20%	Увеличилось в 1,2 раза
Увеличилось на 60%	Увеличилось в 1,6 раза
Увеличилось на 100%	Увеличилось в 2 раза
Увеличилось на 230%	Увеличилось в 3,3 раза
Уменьшилось на 70 %	Увеличилось в 0,3 раза
Уменьшилось на 10%	Увеличилось в 0,9 раза

Теперь перейдем непосредственно к разбору задач.

Примеры.

<u>Пример 1</u>.Определите первоначальную стоимость продукта, если после подорожания соответственно на 120%, 200% и 100% его конечная стоимость составила 264 р.

<u>Решение:</u> Пусть первоначальная стоимость продукта – А. После подорожания на 120% она стала составлять 2,2А, после подорожания на 200% она стала 3*2,2А, и наконец после подорожания на 100% она стала составлять 2*3*2,2А=13,2А. Имеем уравнение 13,2А=264, значит А=20 р.

<u>Пример 2.</u>Цена некоторого товара увеличилась на 20%, а затем снизилась на 20%. На сколько в итоге изменилась стоимость товара ?

<u>Решение</u>: Пусть первоначальная цена товара равна А рублей. После повышения на 20% она стала равняться 1,2А, а после понижения – 0,8*1,2А, т.е. 0,96А. Итак, товар вначале стоил А рублей, а в конце – 0,96А, значит его стоимость снизилась на 4%. (Как изменился бы ответ, если бы товар вначале подешевел на 20%, а затем подорожал на 20% ?)

Замечание – можно было считать, что товар вначале стоил 100 единиц (не обязательно рублей), тогда после повышения он стал стоить 120 единиц. А после понижения – 96 единиц. Значит, стоимость снизилась на 4%.

<u>Пример 3</u>. Цена на товар была повышена на 25 %. На сколько процентов ее надо снизить, чтобы получить первоначальную цену товара ?

<u>Решение:</u> Пусть товар вначале стоил А рублей. После повышения он стал стоить 1,25А.

На сколько надо умножить данное число, чтобы опять получилось А ? Конечно, на 0,8. Значит, цену на товар необходимо понизить на 20%.

Пример 4. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и тоже число процентов. Найти это число, если известно что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года завод ежемесячно выпускал 726 изделий.

Решение: Пусть х - процент увеличения выпуска продукции за месяц. По условию задачи это увеличение происходило два раза в год. После первого увеличения продукции стало выпускаться $(1+0,01\cdot x)\cdot 600$ = 600 + 6х изделий в месяц. После второго увеличения продукции стало $(1+0,01\cdot x)\cdot(600+6x)$ (не забудьте, что второе увеличение происходит относительно уже увеличенного при первом разе объема выпускаемой продукции). В итоге мы получаем уравнение:

$(1+0,01\cdot x)\cdot(600+6x)$ = 726

$(1+0,01\cdot x)^2\cdot 600$ = 726

$(1+0,01\cdot x)^2 = \frac{726}{600}$

$1+0,01\cdot x$ = 1,1 или $1+0,01\cdot x$ = -1,1

х = 10 или х = -210

Условию задачи удовлетворяет только х = 10.

Ответ: выпуск продукции повышался дважды на 10%.

Пример 5. К 1,5 кг 10% раствора соли добавили 2,5 кг 16% раствора этой же соли. Найти концентрацию соли в смеси.

Решение: Масса итоговой смеси составляет 4 кг. Чистая соль в итоговой смеси получается в результате объединения чистой соли ир первого и второго растворов. В первом растворе чистой соли будет 0,1*1,5=0,15 кг, а во втором растворе – 0,16*2,5=0,4 кг. Всего получили 0,55 кг чистой соли в смеси массой 4 кг. Процентное содержание этой соли в смеси найдем из пропорции:

4 кг – 100%

0,55 кг – Х%, откуда Х = 0,55*100/4=13,75%.

Внимательно продумайте данную задачу. Во многих задачах применяют один и тот же прием – **рассматривают массу чистого вещества**.

Пример 6. Сколько килограммов воды нужно добавить к 20 кг 5% раствора соли в воде, чтобы получить 4% раствор ?

Решение: Чистой соли в первоначальном растворе будет 0,05*20=1 кг. Столько же чистой соли будет и в новом растворе, поскольку добавлялась лишь вода. Массу всего раствора найдем из пропорции:

1 кг – 4%

Х кг – 100%,

значит, масса всего раствора равна 100/4 = 25 кг, т.е. добавили 5 кг воды.

Пример 7. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие 20% воды. Сколько фруктов получится из 20 кг свежих ?

Решение: Чистого вещества в свежих фруктах будет 28%, т.е. 0,28*20=5,6 кг. В сухих фруктах сухого вещества будет столько же, поскольку масса уменьшается за счет потери воды, и составит 80%. Массу сухих фруктов можно найти из пропорции:

5,6 кг – 80%

Х кг - 100%,

значит, Х=5,6*100/80=7 кг.

Пример 8. К 20 кг 4 % раствора соли в воде добавили 30 кг 5% раствора, а затем 8 % воды выпарили. Найти концентрацию соли в полученном растворе.

Решение: Запишем все вычисления в таблицу

	Масса	Чистая соль	Вода
1 раствор	20	0,04*20=0,8	0,96*20=19,2
2 раствор	30	0,05*30=1,5	0,95*30=28,5
итог	20+30=50	0,8+1,5=2,3	19,2+28,5=47,7
Выпаривание	-3,8		$-0{,}08*47{,}7 \approx -3{,}8$
Итог	50-3,8=46,2	2,3	43,9

Теперь из нижней строчки можно найти концентрацию соли в полученном растворе:

46,2 кг – 100%

2,3 кг - X%,

откуда X=2,3*100/46,2=5%. Значение приближенное, поскольку при подсчете выпаренной воды точное значение было заменено приближенным. Не переводя дробные числа в десятичную запись, найдите точное значение.

Пример 9. Из двух сплавов с 60% и 80% содержанием меди требуется получить 40 кг сплава с 75% содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять ?

Решение: Решим задачу, используя таблицу.

	масса	медь	Примесь
1 сплав	X	0,6*X	0,4*X
2 сплав	40-X	0,8*(40-X)	0,2*(40-X)
Итог	40	0,6*X+0,8*(40-X)	0,4*X+0,2*(40-X)

Поскольку в итоговом сплаве меди содержится 75%, то получим уравнение

0,6*X+0,8*(40-X)=0,75*40. Решим его.

0,6*X+32-0,8*X=30

-0,2*X=-2

X=10. Итак, 1 сплава нужно взять 10 кг, а второго 30 кг.

Пример 10. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 кг. содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди ?

Решение: Если в сплаве в 36 кг меди содержится 45 %, то легко вычислить и саму массу меди: 36 кг - 100 %

x кг - 45 %

откуда x = $\frac{36\cdot45}{100}$ = 16,2 кг. (Впрочем можно было просто воспользоваться формулой $x = 0{,}01\cdot45\cdot36$.)

Если мы к этим 16,2 кг прибавим еще m кг меди, то в новом сплаве, вес которого увеличился на m кг и стал составлять 16,2 + m кг, это будет составлять 60 %, т.е.

16,2 + m - 100 %

16,2 - 60 %

откуда $(16{,}2+m)\cdot60=16{,}2\cdot100$. Решая это уравнение, находим m = 13,5 кг.

Ответ: к сплаву нужно добавить 13,5 кг меди.

Пример 11.Один сплав меди с оловом содержит эти металлы в отношении 2:3, а другой – в отношении 3:7. В каком количестве необходимо взять эти сплавы, чтобы получить 12 кг нового сплава, в котором медь и олово содержались бы в отношении 3:5 ?

Решение: Решение задачи аналогично предыдущей. Так отношение 2:3 можно интерпретировать, что одна часть составляет 40%, а вторая – 60%.

	масса	медь	олово
1 сплав	X	0,4*X	0,6*X
2 сплав	12-X	0,3*(12-X)	0,7*(12-X)
Итог	12	0,4*X+0,3*(12-X)	0,6*X+0,7*(12-X)

Имеем уравнение: (0,4*X+0,3*(12-X))/(0,6*X+0,7*(12-X))=3/5. Решим его.

$(3,6+0,1*X)/(8,4-0,1*X)=3/5$

$5*(3,6+0,1*X)=3*(8,4-0,1*X)$

$18+0,5*X=25,2-0,3*X$

$0,8*X=7,2$

$X=9$

Итак, 1 сплава необходимо взять 9 килограмм. А второго – 3 килограмма.

Другое решение можно получить, если записать уравнение для массы меди в итоговом сплаве: $\frac{2}{5}\cdot X+\frac{3}{10}\cdot(12-X)=\frac{3}{8}\cdot 12$

Самостоятельная работа -1.

Группа А.

1. Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов надо увеличить число рабочих, если производительность труда повысится на 25% ? Ответ: 44
2. Собрали 100 кг грибов, влажность которых составила 99%. Когда грибы подсушили, их влажность снизилась до 98%. Какова стала их масса ?
3. Смешали 1 кг 30% раствора соли с 2 кг раствора этой же соли меньшей концентрации. В результате получили 3 кг 25% раствора. Найти концентрацию второго раствора.
4. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля в 30% ?
5. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10%, во втором — 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30%. Определить массу полученного слитка. Ответ: 9

Группа В.

1. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25 % раствор кислоты ?
2. (А или В) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве? Ответ: 40 и 43 1/3
3. Имеются два сплава золота с серебром. В одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом – в отношении 3:7. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро содержались бы в отношении 5:11 ?
4. К 22 часам 20% непроголосовавших к 18 часам человек проголосовало, после чего процент непроголосоввших людей составил 32%. На сколько процентов увеличилось количество проголосовавших к 22 часам по сравнению с проголосовавшими к 18 часам? Ответ: 13 1/3
5. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой? Ответ: 5